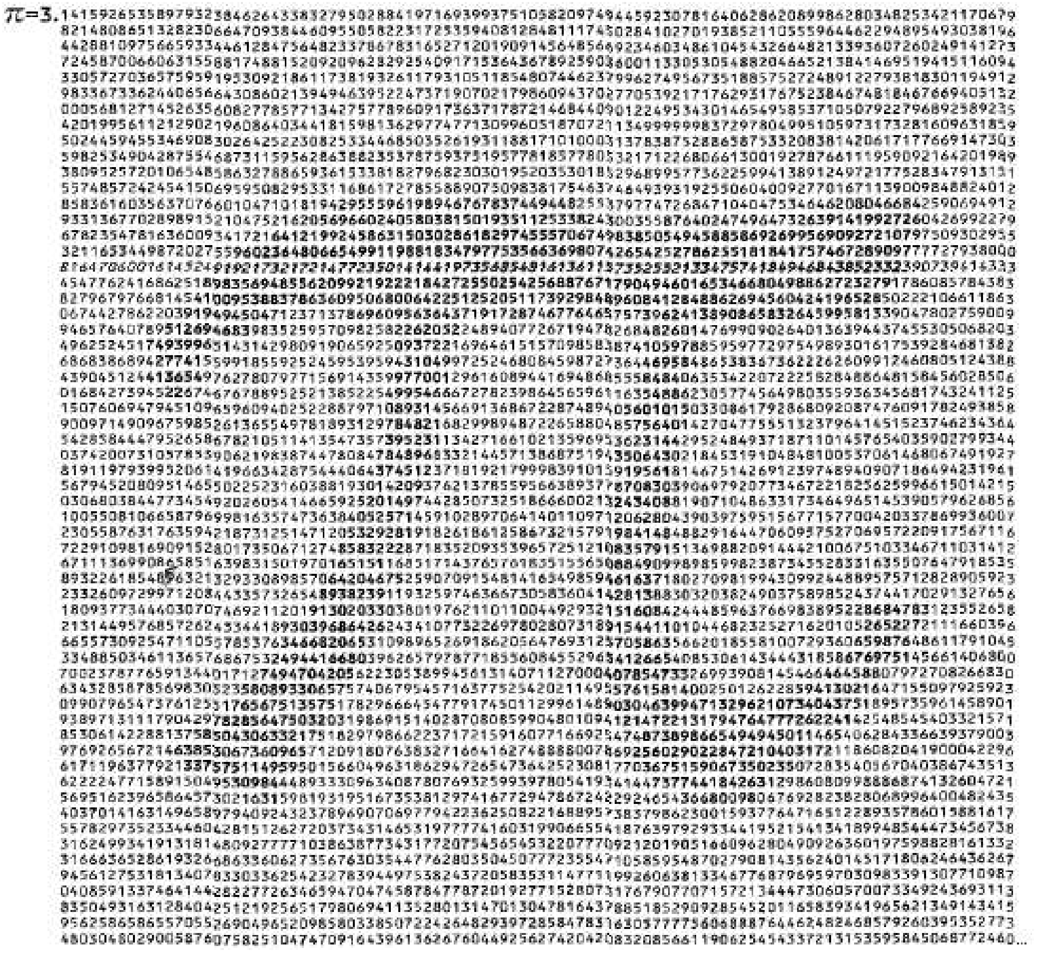
Tesina del corso di MC5



Dott. Andrea Agnesse

La faccia di Pi greco era mascherata e si capiva
che nessuno avrebbe potuto vederla e restare vivo.
Ma dalla maschera usciva uno sguardo penetrante,
inesorabile, freddo ed enigmatico.

Bertrand Russell

Sommario

In questa tesina presenteremo π dandone la definizione "classica", ovvero la definizione più antica in assoluto, e faremo vedere che la suddetta è ben posta. Seguirà la sezione in cui verranno presentate le proprietà di π insieme ad alcuni fatti di particolare interesse storico. Una volta chiarita la vera natura di questo numero, introdurremo alcune formule per calcolarne le cifre, approfondendone una in particolare; non sarà possibile elencarle tutte per questione di tempo e di spazio, per cui sceglieremo le più significative. Infine vedremo alcune formule famose in cui π compare da protagonista e qualche curiosità.

Un po' di preliminari

Come (quasi) tutti sanno il numero indicato con π, noto anche come costante di Archimede o di Ludolph, è, per definizione, il rapporto tra la circonferenza di un cerchio, posto nel piano euclideo[a], e il suo diametro[b] (vedi figura 1). Questa semplice definizione geometrica, forse la prima che sia stata data per poter definire non un ente astratto come una retta o un piano, ma un numero vero e proprio, nasconde in sé molte problematiche ed una infinità di interessanti evoluzioni.

Ludolph Van Ceulen (Hildesheim 1539 — Leiden 1610) era un matematico olandese che spese gran parte della sua vita a calcolare le cifre di π. Arrivò fino alla 35-esima cifra decimale esatta, e fu così orgoglioso del suo risultato che lo fece incidere sulla sua lapide

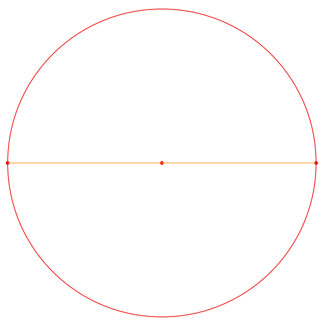


Figura 1: i protagonisti del rapporto

Quello che forse molti non sanno è che π, geometricamente, non è legato solo al cerchio, ma a molte altre figure: era già noto ai greci il suo coinvolgimento nel calcolo dell'area dell'ellisse e nel XVII secolo è stato scoperto quello con l'arco di cicloide, l'ipocicloide, la versiera e varie altre figure.

[a]questa precisazione è necessaria, in quanto nelle geometrie non euclidee le cose stanno diversamente

[b]oppure come l'area del cerchio di raggio unitario; noi comunque continueremo ad usare la prima definizione

L'uso del simbolo π per indicare la costante di Archimede è stato introdotto nel 1706, nell'opera *A New Introduction to Mathematics* di William Jones, mentre in precedenza lo si indicava semplicemente con p; questo si è poi consolidato dopo essere stato adottato da Eulero. Questa scelta è stata, a quanto pare presa in considerazione in quanto π è sia l'iniziale della parola greca $\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho o\sigma$ (perimetros — misura attorno) che dello stesso Pitagora [11, 10].

William Jones (Llanfihangel Tw'r Beird, Anglesey, Galles, 1675 — Londra, 1749)

La prima questione che affronteremo in questo breve excursus sul π è verificare che la definizione sia, come si dice, ben posta, ovvero vogliamo dimostrare che al variare del raggio del cerchio il rapporto che definisce π rimane costante. Non vorremmo cioè che cambiando le dimensioni del cerchio definissimo un numero ogni volta diverso.
Da notare che gli antichi greci erano a conoscenza di questo fatto, e anzi Euclide nella proposizione XII.2 degli *Elementi* stabiliva addirittura che due aree circolari stanno tra loro come i quadrati dei rispettivi raggi[c].

Euclide di Alessandria (III secolo a.C.)

Iniziamo col considerare un cerchio $\mathcal{C}$ di raggio r fissato e il poligono regolare di n lati $\mathcal{P}_n$ a lui inscritto; con semplice trigonometria[d] è possibile calcolare il perimetro P_n di $\mathcal{P}_n$ (vedi figura 2)

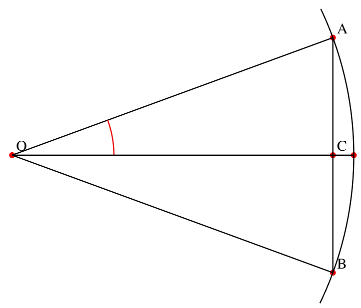


Figura 2: "spicchio" del poligono regolare inscritto: $\overline{AB}$ è il lato e $\widehat{AOC} = \alpha_n$

$$P_n = n\overline{AB} = 2n\overline{AC} = 2nr\sin\alpha_n \;;$$

poiché $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l(\mathcal{C})$, con $l(\mathcal{C})$ lunghezza della circonferenza che delimita $\mathcal{C}$, possiamo scrivere

$$l(\mathcal{C}) = 2r\mathcal{P} \;,$$

[c] in termini moderni, $\mathcal{A} = kr^2$; fu Archimede che per primo dimostrò che $k = \pi$, ovvero che la misteriosa costante che entrava in gioco nel calcolo della lunghezza della circonferenza di un cerchio, lo faceva anche nel calcolo della sua area

[d] tenendoci sul generico, per non usare implicitamente π

dove $\mathcal{P} := \lim_{n\to\infty} n \sin \alpha_n$ è un qualche numero finito che non dipende da r. Calcolando a questo punto il rapporto otteniamo che

$$\frac{l(C)}{r} = 2\mathcal{P} \;;$$

essendo r generico abbiamo dimostrato che questo rapporto è indipendente dal raggio e dunque costante per ogni cerchio.

L'importanza di π non è comunque confinata solo nella geometria, dove abbiamo visto rappresenta la chiave per studiare correttamente una delle figure più importanti, ma è possibile trovare questo valore anche in molti altri ambiti, quali ad esempio

- *probabilità*:
  dati $n, m \in \mathbb{Z}$ scelti a caso si dimostra che $\mathbb{P}[MCD(m,n) = 1] = \frac{6}{\pi^2}$;

  il *problema dell'ago di Buffon*, proposto per la prima volta dal naturalista francese Buffon nel 1733, chiede di trovare la probabilità che un ago di lunghezza ℓ, cadendo a caso su un pavimento con delle rette parallelle a distanza $d \geqslant \ell$, tocchi una retta: si dimostra che questa probabilità è $\frac{2\ell}{d\pi}$ [10];

  Georges-Louis Leclerc conte di Buffon (Montbard, Borgogna, 1707 — Parigi, 1783) [1]

- *fisica*:
  indicando con x e p rispettivamente la posizione e la quantità di moto di un corpo e con h la Costante di Planck, il *principio di indeterminazione di Heisenberg* (1927) afferma che $\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$ [1, 11];

- *cucina*:
  il *secondo teorema della pizza* afferma che il volume di una pizza spessa α e di raggio z è **pi**$zz\alpha$, dove **pi** è l'equivalente anglosassone del nostro "pigreco" [10].

1 π non è $3,14$

La prima cosa riguardo a π che si insegna a scuola, dopo la definizione, è ovviamente il suo valore: $\pi = 3,14$; questo in realtà non è il reale valore di π, ma solo un'approssimazione, in quanto π ha infinite cifre decimali. Semplicemente è la più comoda per i comuni usi scolastici.

Nell'antichità non era raro trovare addirittura $\pi = 3$. Questa approssimazione piuttosto grossolana è presente, implicitamente, anche ne *La Sacra Bibbia* in ben due punti, I libro dei Re 7, 23 e II libro delle Cronache 4, 2; quest'ultimo passo recita: *Costruì il mare di metallo fuso del diametro di dieci cubiti, completamente circolare [...] la sua circonferenza era di trenta cubiti tutt'attorno.*

3.				
1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510
5820974944	5923078164	0628620899	8628034825	3421170679
8214808651	3282306647	0938446095	5058223172	5359408128
4811174502	8410270193	8521105559	6446229489	5493038196
4428810975	6659334461	2847564823	3786783165	2712019091
4564856692	3460348610	4543266482	1339360726	0249141273
7245870066	0631558817	4881520920	9628292540	9171536436
7892590360	0113305305	4882046652	1384146951	9415116094
3305727036	5759591953	0921861173	8193261179	3105118548
0744623799	6274956735	1885752724	8912279381	8301194912
9833673362	4406566430	8602139494	6395224737	1907021798
6094370277	0539217176	2931767523	8467481846	7669405132
0005681271	4526356082	7785771342	7577896091	7363717872
1468440901	2249534301	4654958537	1050792279	6892589235
4201995611	2129021960	8640344181	5981362977	4771309960
5187072113	4999999837	2978049951	0597317328	1609631859
5024459455	3469083026	4252230825	3344685035	2619311881
7101000313	7838752886	5875332083	8142061717	7669147303
5982534904	2875546873	1159562863	8823537875	9375195778
1857780532	1712268066	1300192787	6611195909	2164201989...

Tabella 1: le prime 1000 cifre di π: meno di un granello di sabbia nell'universo

Quello che non deve stupire è che la storia di π sia costellata di approssimazioni[e]. Il più antico testo conosciuto in cui appare π è il *Papiro di Rhind* del 1650 a.C., attribuito allo scriba egizio Ahmes, che lo avrebbe copiato da

Ahmes (1680 a.C. — 1620 a.C.)

[e] il perché verrà chiarito nella sezione 2

un testo di alcuni secoli prima. In questo papiro si suppone che l'area del cerchio fosse uguale a quella di un quadrato di lato $\frac{8}{9}$ il diametro del cerchio stesso, $\mathcal{A}_{\mathcal{C}} = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\, d\right)^2$, ovvero

$$\pi = \frac{256}{81} = 3.16\ldots$$

Queste approssimazioni si susseguirono per molto tempo, fino ad Archimede, forse il più grande matematico del mondo antico. Egli infatti, nel suo trattato *Misura del cerchio* (circa 225 a.C.), non solo riuscì a trovare la formula per la circonferenza del cerchio, ma riuscì anche a dare una stima di π, utilizzando un poligono regolare inscritto e circoscritto di 96 lati, che dava le prime tre cifre esatte [5, 6, 10, 11]:

Archimede di Siracusa (circa 287 a.C. — 212 a.C.)

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

La modernità di questa stima sta proprio nel fatto che *è* una stima, ovvero Archimede si accorse che non era riuscito a trovare il valore esatto di π e diede dunque due disugualianze.

Figura 3: Archimede in un dipinto di Domenico Fetti (1620)

Questa ricerca di approssimazioni continua ancora ai giorni nostri, anche se per scopi diversi da quelli degli antichi. Attualmente il record di cifre di

π calcolate appartiene al giapponese Yasumasa Kanada[f], che a fine 2002 è riuscito a calcolare più di 1000 miliardi di cifre decimali di π in più di 600 ore utilizzando 64 computer Hitachi SR8000/MPP) [11].

Figura 4: Yasumasa Kanada

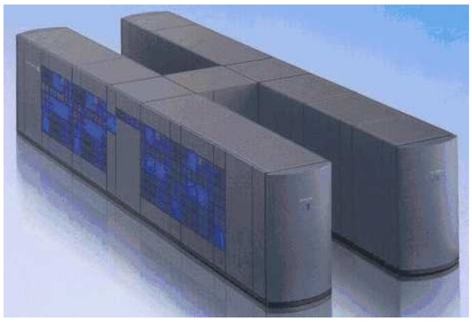


Figura 5: Hitachi SR8000/MPP

1.1 π è un numero irrazionale

Come abbiamo detto π ha infinite cifre decimali, ma esistono molti altri numeri con questa caratteristica, come ad esempio $\frac{1}{3}$, che portato in notazione decimale diventa:

$$\frac{1}{3} = 0,33333333333333333333333333333333\ldots \;;$$

eppure π è molto più "complicato" di $\frac{1}{3}$! La differenza sta nel fatto che il secondo ha una certa regolarità nella sua espressione decimale; infatti non a caso si scrive per brevità $\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$, ad indicare che l'insieme di cifre soprasegnato si ripete all'infinito.

Altri esempi numeri di questo tipo sono:

- $\frac{78}{7} = 11,142857142857142857142857142857\ldots = 11,\overline{142857}$
- $\frac{78}{70} = 1,1142857142857142857142857142857\ldots = 1,1\overline{142857}$
- $\frac{9}{9} = 0,99999999999999999999999999999999\ldots = 0,\bar{9} = 1$

[f] `http://www.super-computing.org/`

Questa caratteristica di non avere da un certo punto in poi cifre che si ripetono sta ad indicare che π non è un numero razionale ($\pi \notin \mathbb{Q}$); in particolare non si può esprimere tramite rapporto di interi, ovvero $\nexists\ n, m \in \mathbb{Z} : \pi = \frac{n}{m}$. L'importanza di questo fatto è enorme, basti pensare che non essendoci alcuna ripetizione delle cifre decimali di π, la ricerca di stime sempre più accurate non avrà mai fine!

Il primo che dimostrò questo fatto fu Lambert attorno al 1760. Nel 1947 I. Niven, professore dell'Università dell'Oregon, trovò una dimostrazione molto più semplice che fa uso del calcolo integrale [6, 4, 5, 1, 11, 10].

Johann Heinrich Lambert (Mulhouse, 1728 — Berlino, 1777)

Figura 6: Johann Heinrich Lambert

Il fatto che non ci sia nessuna regolarità nelle cifre decimali di questo numero ha portato nel corso degli anni a ideare vari stratagemmi, tra i quali l'utilizzo di filastrocche o piccole poesie per poter ricordarne le cifre; due esempi in lingua italiana sono

Ave o Roma o Madre gagliarda di latine virtù
che tanto luminoso splendore prodiga spargesti con la tua saggezza

e

Che n'ebbe d'utile Archimede da ustori vetri sua somma scoperta?

mentre un semplice esempio in inglese (potremmo dire "profondamente" legato al problema in questione è)

How I wish I could calculate Pi!!

Il trucco sta nell'associare ad ogni parola, tramite la sua lunghezza, una cifra di π:

Ave	o	Roma	o	Madre	gagliarda	di	latine	virtù	...
3,	1	4	1	5	9	2	6	5	...

Di sicuro gli esempi più elaborati sono quelli di Mike Keith[g]: nella sua poesia del 1995, *Near a Raven*, ispirata a quella di Edgar Allan Poe *The Raven*, con un trucco simile riesce a scrivere le prime 740 cifre di π e nella sua storia del 1996 *Cadaeic Cadenza* ne inserisce addirittura le prime 3835 cifre.

1.2 π è un numero trascendente

A rendere le cose ancora più difficili non c'è solo il fatto che π è irrazionale, ma che è addirittura *trascendente*[h], come è stato dimostrato nel 1882 da Lindemann; questo fa sì che non esista alcuna formula algebrica che permetta di ottenere π [4, 5, 11, 10].

Ferdinand von Lindemann (Hannover, 1852 — Monaco di Baviera, 1939)

Figura 7: Ferdinand von Lindemann

La trascendenza di π porta anche ad altre conseguenze. La più disarmante è forse l'impossibilità di una delle tre celebri costruzioni classiche: la *quadratura del cerchio con riga e compasso*. Il problema della quadratura del cerchio è di base molto semplice, e consiste nel cercare di costruire, dato un cerchio, un quadrato di uguale area. Usando la teoria di Galois e dei campi, si dimostra che i numeri costruibili con riga e compasso sono tutti e soli quelli contenuti in estensioni di grado 2^h, per qualche $h \in \mathbb{N}$, del campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ (dunque solo alcuni numeri algebrici), e ovviamente π non è tra

[g] `http://users.aol.com/s6sj7gt/`

[h] ricordiamo che un numero si dice *trascendente* se non esiste nessun polinomio a coefficienti razionali e di grado maggiore di 1 che abbia quel numero come radice

questi [8]. È comunque possibile costruire quadrati la cui area approssima quella del cerchio con arbitraria precisione.

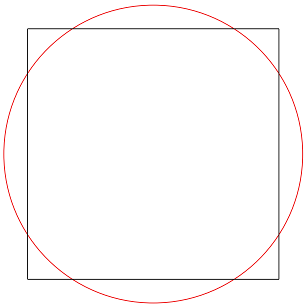


Figura 8: Quadratura del cerchio

Altro problema classico, minore rispetto alla quadratura, ma sempre collegato al cerchio, è la *rettificazione della circonferenza*, che consiste nel tracciare un segmento lungo quanto una circonferenza di un dato cerchio. La sua risoluzione, come per il problema precedente, è impossibile in quanto legata alla non costruibilità di π [8, 5]. Da notare che l'opera di Archimede implica che i due problemi siano equivalenti.

1.3 π è normale?

Anche se si è dimostrata la sua natura trascendente, l'interesse per π non è affatto calato, tanto che recentemente si è presentata un'altra questione, che prende spunto dalla seguente domanda: "nell'espressione decimale di π è possibile trovare 1000 zeri consecutivi?"
Cominciamo col dire che un numero *normale* è un numero in cui le cifre decimali sono distribuite in maniera del tutto casuale[i]. Per far vedere che questa definizione non è vuota è possibile dare un esempio di questi numeri, come la costante di Champernowne (in base dieci): $0,12345678910111213141516\ldots$

Riguardo a questi numeri un matematico francese, Borel, ha dimostrato nel 1909 che quasi[j] tutti i numeri sono normali, ed è ovvio che un numero razionale non è normale.
Nonostante questi risultati ancora non sappiamo nulla circa la normalità di numeri quali ad esempio $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e e π; gli unici numeri che sappiamo essere normali sono alcuni costruiti ad hoc, come quello citato prima [5, 11, 10].

Félix-Éduard-Émile Borel (Saint-Affrique, Aveyron, 1871 — Parigi, 1956)

[i] per *casuale* si intende che ogni n-upla di cifre appare in media 1 volta su 10^n
[j] *quasi* riferito alla misura di Lebesgue

2 La retta via

Come abbiamo detto, il fatto che π sia trascendente fa si che non si abbia nessuna regola per trovare la sue cifre decimali, ma solo formule che permettono di calcolarle volta per volta.

2.1 Un'approssimazione di π

Vediamo in dettagio una delle prime di queste formule "esatte" apparse nella storia: la *serie di Gregory-Leibniz* (1671), che può essere ricavata secondo il seguente procedimento: consideriamo prima di tutto la formula per la serie geometrica

James Gregory (Drumaok, Aberdeen, 1638 — Edimburgo, 1675)

Gottfried Wilhelm von Leibniz (Lipsia, 1646 — Hannover, 1716))

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^n + \ldots \qquad \forall q \in (-1,1) \ ;$$

prendendo $q = -x^2$ otteniamo

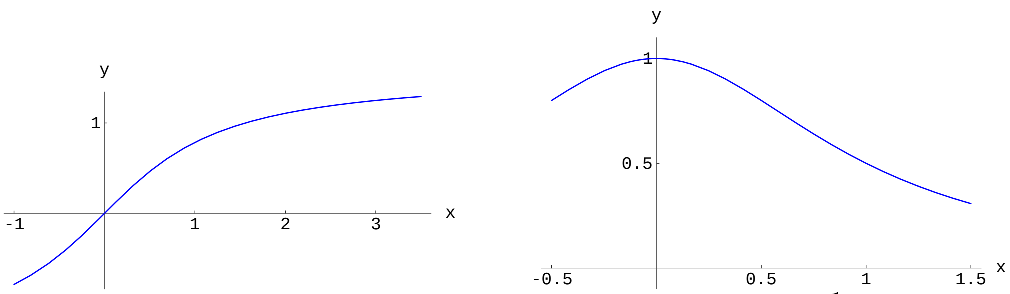
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots \qquad \forall x \in (-1,1) \ ,$$

che integrata tra 0 e 1 diventa

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^4 dx - \int_0^1 x^6 dx + \int_0^1 x^8 dx - \ldots$$

ovvero (vedi figura 9)

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$



(a) $f(x) = \arctan x$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Figura 9: π e arcotangente

Questa formula, molto comoda in quanto prevede solamente somme aritmetiche, è quasi inutile nel caso in cui si vogliano effettivamente calcolare le cifre di π; infatti, nonostante $S_n = \sum_0^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{4}$, la convergenza è estremamente lenta.
Questo implica che per poter determinare ogni singola cifra di π bisogna sommare moltissimi termini della serie. Con un programma provato sul mio computer[k] ho trovato che

- la prima cifra decimale (3) si stabilizza a partire da S_6;
- la seconda cifra decimale (1) si stabilizza a partire da S_{24};
- la terza cifra decimale (4) si stabilizza a partire da S_{626};
- la quarta cifra decimale (1) si stabilizza a partire da S_{2455};
- la quinta cifra decimale (5) si stabilizza a partire da S_{137054};
- la sesta cifra decimale (9) si stabilizza a partire da S_{369879};

arrivato a S_{615735} queste erano le uniche che si erano stabilizzate.
Si "narra" che per poter avere 100 cifre esatte di π bisogni sommare qualcosa come

100 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

termini: non fatico a crederlo!

2.2 Altre approssimazioni di π

Presentiamo qui ulteriori formule per l'approssimazione di π.

Forse la prima formula vera trovata per π è

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2}}}}}_{n \text{ radici}} \tag{1}$$

Questa formula, poco utile per effettuare calcoli con buona approssimazione a causa della radici una dentro l'altra, deriva dalla più antica tecnica che abbiamo visto per approssimare questo numero: il calcolo dei perimetri di poligoni regolari inscritti.

[k] vedi appendice A

Si può infatti dimostrare che, dato un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza e di lato s_n, il lato del poligono regolare di $2n$ lati inscritto nella stessa circonferenza è esprimibile come $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - {s_n}^2}}$; considerando poi che in un cerchio di raggio unitario il quadrato inscritto ha lato $s_4 = \sqrt{2}$, possiamo trovare $s_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $s_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ e così via, derivando in questo modo (1).

La prima formula "esatta" della storia che fa uso solo di numeri razionali è la cosiddetta *formula di Wallis*, apparsa per la prima volta nella sua opera *Arithmetica Infinitorum* del 1655 [1, 7]:

John Wallis (Ashford, Kent, 1616 — Oxford, 1703)

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right]^2$$

Questa formula, importantissima dal punto di vista storico e culturale, segna l'inizio di nuove strategie per approssimare π; non più tramite poligoni regolari inscritti come è stato per oltre 15 secoli (confermando così il genio di Archimede), ma tramite serie e produttorie infinite più o meno complesse.

Il problema di Basilea, proposto da Pietro Mengoli nel 1644, è un famoso problema di analisi, che chiede di trovare il valore della serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$; fu risolto da Eulero nella prima metà del XVIII secolo che, dimostrandone il valore, trovò gratis un'altra formula per calcolare π:

Leonard Euler (Basilea, 1707 — Pietroburgo, 1783)

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \dots$$

Altre formule, chiamate *di tipo Machin*, includono delle arcotangenti, ma data la loro complessità sono usate più per testare nuovi supercomputer che per conti veri e propri, data la loro veloce convergenza. La prima di queste formule fu trovata da Machin nel 1706 manipolando la serie di Leibniz in questo modo: sia β tale che $\tan\beta = \frac{1}{5} \Rightarrow \tan 2\beta = \frac{5}{12}$ e $\tan 4\beta = \frac{120}{119}$, che ï¿½di poco maggiore di 1; $\tan(4\beta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{239} \Rightarrow \arctan(\frac{1}{239}) = 4\beta - \frac{\pi}{4}$, ovvero

John Machin (Inghilterra, 1680 — Londra, 1751)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} \, .$$

A questo punto, sviluppando le arcotangenti con Taylor otteniamo

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{16}{5} - \frac{16}{3 \cdot 5^3} + \frac{16}{5 \cdot 5^5} - \frac{16}{7 \cdot 5^7} + \frac{16}{9 \cdot 5^9} - \dots \\ & - \frac{4}{239} + \frac{4}{3 \cdot 239^3} - \frac{4}{5 \cdot 239^5} + \frac{4}{7 \cdot 239^7} - \frac{4}{9 \cdot 239^9} + \dots \end{aligned}$$

Spezzando ulteriormente le due arcontangenti si possono ottenere formule la cui convergenza è ancora più veloce, ma diventano sempre più complesse; nel 2002 Kanada (vedi sezione 1) usò

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{49} + 32 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239} + 12 \arctan \frac{1}{110443}$$

e

$$\frac{\pi}{4} = 44 \arctan \frac{1}{57} + 7 \arctan \frac{1}{239} - 12 \arctan \frac{1}{682} + 24 \arctan \frac{1}{12943}$$

Una delle formule pi recenti per il calcolo delle cifre di π che merita una menzione particolare per la sua straordinaria unicità è la formula di Bailey, Borwein e Plowffe del 1997, riportata nel loro articolo *The quest for Pi*:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) .$$

Il motivo per cui questa formula è unica è il fatto che da questa è possibile tirar fuori un algoritmo che permette di calcolare l'n-esima cifra di π in base 16 *senza* dover calcolare le precedenti! Purtroppo non esiste una formula simile per la base decimale.

3 Varie ed eventuali

Inseriamo in questa sezione alcuni fatti notevoli riguardanti il π.

3.1 Altre definizioni di π

Come abbiamo anticipato nell'introduzione è possibile dare altre definizioni, alternative ma equivalenti, di π.

Una di queste l'abbiamo già data quando abbiamo parlato del metodo di esaustione usato da Archimede per stimare π. Ma in effetti anche le formule per la sua approssimazione che abbiamo dato nella sezione precedente possono essere viste come *definizioni operative* di π.

Sicuramente una delle definizioni più interessanti (e teoriche) è quella che fa uso della serie di Taylor delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ [9]:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{e} \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

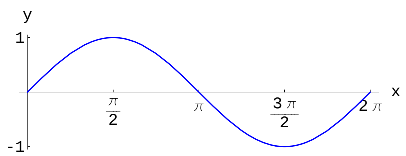


Figura 10: $f(x) = \sin x$

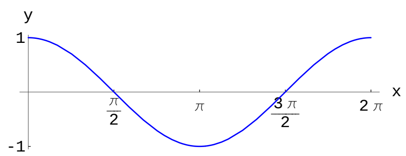


Figura 11: $f(x) = \cos x$

Per queste serie è possibile dimostrare non solo la convergenza su tutto il campo reale, ma addirittura sull'intero campo complesso; poiché queste due serie, sulla retta reale, coincidono con i valori *canonici* di seno e coseno[1] (ovvero le due funzioni sono *analitiche*), possono essere prese a definizione delle due funzioni stesse. A questo punto è possibile definire π come il più piccolo numero reale strettamente positivo che annulla la serie del seno o come 2 volte il più piccolo numero reale strettamente positivo che annulla la serie del coseno.

3.2 Curiosità

Un fatto che avevamo accennato in precedenza riguarda la presenza di π nel calcolo delle aree. Come abbiamo già detto esistono molte figure, sia

[1]quelli ricavati con le costruzioni geometriche

piane che solide, la cui superficie o volume è esprimibile tramite una formula in cui compare π, ma questo è vero anche per molti integrali, perfino estesi a tutta la retta reale.

Uno degli integrali più importanti è l'*Integrale di Gauss*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

il cui uso, per esempio nella teoria della probabilità, è fondamentale nei

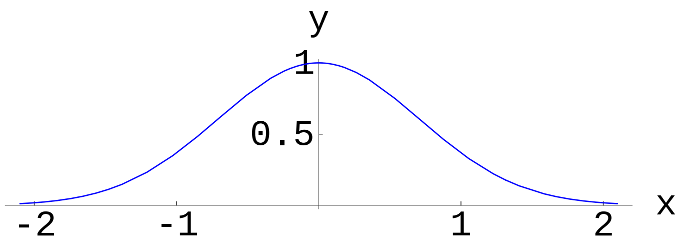


Figura 12: $f(x) = e^{-x^2}$

panni della *distribuzione normale*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = 1 \ .$$

Da notare che queste formule possono essere usate per poter dare una stima di π trovando l'area sottesa al grafico della funzione con un metodo di quadratura: anche se fattibile in linea teorica, questo approccio presenta vari problemi in fatto di accuratezza, primo tra tutti il fatto che bisognerebbe comunque troncare il calcolo dell'integrale a causa dalla non limitatezza del dominio.

π appare in quella che il matematico statunitense Feynman ha definito "la più bella formula della matematica", l'*identità di Eulero*:

Richard Phillips Feynman (New York, 1918 — Los Angeles, 1988)

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \ ;$$

caso particolare della *formula di Eulero*, $e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi$, collega tra loro cinque costanti importantissime della matematica.

Anche se, come abbiamo detto, π è un numero trascendente e dunque le sue cifre decimali non seguono nessun criterio, esistono molte frazioni continue con un determinato schema regolare che danno come risultato π o un qualche suo multiplo, ad esempio:

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{6 + \cfrac{11^2}{\ddots}}}}}} \qquad \frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cfrac{11^2}{\ddots}}}}}}}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \cfrac{5^2}{11 + \cfrac{6^2}{\ddots}}}}}} \qquad \frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cfrac{11^2}{\ddots}}}}}}$$

Il giorno 14 Marzo (anglosassonalmente conosciuto come 3/14) è la *festa del Pi Greco*. A lanciare il *Pi Day*[m] è stato il Museo della Scienza di San Francisco 19 anni fa.

[m] `http://www.exploratorium.edu/pi/index.html` e `http://www.piday.org/`

A Programma

Riportiamo in questa appendice il programma usato per la simulazione della formula di Leibniz. È stato scritto in *Mathematica*[n] in quanto, lavorando in aritmetica esatta, possiamo avere risultati assolutamente precisi; i numeri di riga sono per un più semplice riferimento al codice.

```
1 p = 0;
2 P = {};
3 For[ n=0, n<=1000000, n++,
             (-1)^n
4   p += 4 --------
             (2n+1)
5   P = Append[P, N[p,15]];
6 ]
7 Export[ "pi", P, "List"]
```

Alla riga 1 inizializziamo la variabile `p` che conterrà la somma fino al termine n-esimo (è quello che nella sezione 2.1 abbiamo chiamato S_n); alla riga 2 inizializziamo la lista `P` che conterrà i valori dei vari S_n. Le righe 3–6 contengono il ciclo `For` che è il vero cuore del programma: qui la variabile `n` rappresenta l'indice della sommatoria; nella riga 4 l'n-esimo termine, $4\frac{(-1)^n}{2n+1}$, viene aggiunto a `p`; nella riga 5 il valore di `p` viene poi approssimato a 15 cifre dopo la virgola e appeso alla lista `P`. Per ultimo, riga 7, la lista `P` viene salvata in un file di testo sul computer, come elenco, per una più comoda consultazione.

[n] `http://www.wolfram.com/products/mathematica/index.html`

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Riferimenti bibliografici

[1] Grande dizionario enciclopedico UTET.

[2] AA.VV. *La Sacra Bibbia.*

[3] Lucian Chambadal. *Dizionario di matematica moderna.* Mursia, 1975.

[4] Richard Courant e Herbert Robbins. *Che cos'è la matematica?* Bollati Boringhieri, 1983.

[5] Philip J. Davis. *Il mondo dei grandi numeri.* Zanichelli, 1984.

[6] William Dunham. *Viaggio attraverso il genio.* Zanichelli, 1996.

[7] Pierre Eymard e Jean-Pierre Lafon. *The number π.* American Mathematical Society, 2004.

[8] Stefania Gabelli. *Appunti per un corso elementare di Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois.*

[9] Enrico Giusti. *Analisi Matematica 1.* Bollati Boringhieri, seconda edizione, Giugno 1988.

[10] Wolfram MathWorld. `http://mathworld.wolfram.com/`.

[11] Wikipedia. `http://it.wikipedia.com`.