Classificazione

Data

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (1)$$

dove $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$, consideriamo $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = 0$;
da questa l'equazione caratteristica

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}} \quad \text{dove } \Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \quad (2)$$

se $\Delta > 0 \Rightarrow$ eq. iperbolica
se $\Delta < 0 \Rightarrow$ eq. ellittica
se $\Delta = 0 \Rightarrow$ eq. parabolica

Riduzione in forma canonica

Considero le due soluzioni $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}+\sqrt{\Delta}}{a_{11}} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}-\sqrt{\Delta}}{a_{11}} \end{cases}$ e risolvendo ottengo $\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$ che andranno poi sostituite in (1); le sostituzioni sono:
$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$
$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$
$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + [u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}]$
$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + [u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}]$
$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + [u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}]$

eq. Iperboliche

Forma canonica: $u_{\xi\eta} = \Psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$
Con $\alpha = \xi + \eta$ e $\beta = \xi - \eta$[1] otteniamo $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Psi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$

eq. Ellittiche

Forma canonica: $u_{\xi\eta} = \Psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ [variabili complesse]
Con $\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}$ e $\beta = \frac{\xi-\eta}{2i}$ otteniamo $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Psi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$ [variabili reali]

eq. Paraboliche

In questo caso in (2) abbiamo una sola radice, $\xi = \frac{dy}{dx}$, e per η scelgo una funziona linearmente indipendente da ξ.

Forma canonica: $u_{\eta\eta} = \Psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$

[1] se $\alpha = \frac{\xi+\eta}{k}$ e $\beta = \frac{\xi-\eta}{w}$, $k \neq w$ reali, non otteniamo la forma canonica

Eq. delle onde

sul segmento omogenea

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \in [0, L] \\ u(x,0) = \varphi(x) & \phi \in C^4([0,L]), \varphi(0) = \varphi(L) = \varphi'(0) = \varphi'(L) = 0 \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \psi \in C^3([0,L]), \psi(0) = \psi(L) = \psi'(0) = \psi'(L) = 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} \left[\varphi_k \cos\left(\frac{k\pi a}{L} t\right) + \frac{L}{k\pi a} \psi_k \sin\left(\frac{k\pi a}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

dove $\varphi_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(\xi) \sin\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right) d\xi \qquad \Leftarrow \varphi(x) = \sum_{k\geq 1} \varphi_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$

$\psi_k = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(\xi) \sin\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right) d\xi \qquad \Leftarrow \psi(x) = \sum_{k\geq 1} \psi_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$

sul segmento omogenea con termine forzante

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) & x \in [0, L] \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$$

si divide in $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \in [0, L] \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases} + \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) & x \in [0, L] \\ u(x,0) = 0 \\ u_t x, 0 = 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} \left[\varphi_k \cos\left(\frac{k\pi a}{L} t\right) + \frac{L}{k\pi a} \psi_k \sin\left(\frac{k\pi a}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) + \\ + \sum_{k\geq 1} \frac{L}{k\pi a} \int_0^t \sin\left(\frac{k\pi a}{L}(t-\tau)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) f_k(\tau) d\tau$$

dove $\varphi_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(\xi) \sin\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right) d\xi \qquad \Leftarrow \varphi(x) = \sum_{k\geq 1} \varphi_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$

$\psi_k = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(\xi) \sin\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right) d\xi \qquad \Leftarrow \psi(x) = \sum_{k\geq 1} \psi_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$

$f_k(\tau) = \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi, \tau) \sin\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right) d\xi \qquad \Leftarrow f(x,t) = \sum_{k\geq 1} f_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$

sul segmento non omogenea

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) & x \in [0,L] \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(L,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

prendo $u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$, scelgo $U(x,t)$ che mi rende omogenei i valori al bordo (per esempio $U(x,t) = \mu_1 + \frac{x}{L}(\mu_2 - \mu_1)$) e mi ritrovo che $v(x,t)$ soddisfa il caso precedente

sul segmento omogenea nelle derivate

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \in [0,L] \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 0} \left[\varphi_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}at\right) + \frac{L}{k\pi a}\psi_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}at\right) \right] \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

dove
$$\varphi_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(\xi)\cos\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right) d\xi \qquad \Leftarrow \varphi(x) = \sum_{k\geq 0} \varphi_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$
$$\psi_k = \frac{2}{L}\int_0^L \psi(\xi)\cos\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right) d\xi \qquad \Leftarrow \psi(x) = \sum_{k\geq 0} \psi_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

sulla retta

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, \quad a > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & \varphi \in C^2(\mathbb{R}) \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \psi \in C^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \quad \text{[formula di D'Alembert]}$$

sulla retta con termine forzante

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) & x \in \mathbb{R} \quad a > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & \varphi \in C^2(\mathbb{R}) \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \psi \in C^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

si divide in $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} + \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) & x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = 0 \\ u_t x, 0 = 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t+\tau)} f(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

sulla semiretta omogenea

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \in [0,+\infty) \quad a > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & \varphi(0) = 0 \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \psi(0) = 0 \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$

si cerca di traferire questo problema su tutta la retta: $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, \quad a > 0 \\ u(x,0) = \Phi(x) \\ u_t(x,0) = \Psi(x) \end{cases}$

Ampliamento dispari: $\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \geq 0 \\ -\varphi(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e $\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{se } x \geq 0 \\ -\psi(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha & x - at \geq 0 \\ \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{a-xt}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha & x - at < 0 \end{cases}$$

sulla semiretta omogenea nelle derivate

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \in [0,+\infty) \quad a > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

si cerca di traferire questo problema su tutta la retta: $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, \quad a > 0 \\ u(x,0) = \Phi(x) \\ u_t(x,0) = \Psi(x) \end{cases}$

Ampliamento pari: $\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \geq 0 \\ \varphi(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e $\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{se } x \geq 0 \\ \psi(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha & x - at \geq 0 \\ \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \int_0^{at-x} \psi(\alpha) d\alpha\right] & x - at < 0 \end{cases}$$

in 2 dimensioni

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u & (x,y) \in Q = [0,L] \times [0,R], \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y) \\ u_t(x,y,0) = \psi(x,y) \\ u\Big|_{\partial Q} = 0 \end{cases}$$

$$u(x,y,t) = \sum_{n,k\geq 1} \left[\varphi_{n,k} \cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right) + \frac{L}{k\pi}\psi_{n,k} \sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right)\right] \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}y\right)$$

$$\varphi_{n,k} = \int_0^R\!\!\int_0^L \varphi(x,y) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{R}y\right) dxdy \quad \Leftarrow \varphi(x,y) = \sum_{n,k\geq 1} \varphi_{n,k} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{R}y\right)$$

$$\psi_{n,k} = \int_0^R\!\!\int_0^L \psi(x,y) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{R}y\right) dxdy \quad \Leftarrow \psi(x,y) = \sum_{n,k\geq 1} \psi_{n,k} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{R}y\right)$$

in 3 dimensioni

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u & \Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = t(M\psi)(x,t) + \partial_t[t(M\varphi)(x,t)] \qquad \text{dove} \quad (MF)(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^1} F(x+ty)\sigma(dy)$$

Le coordinate sferiche sono $\begin{cases} x_1 = r\cos\theta\sin\varphi \\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi \\ x_3 = r\cos\varphi \end{cases}$ a cui va aggiunto (nell'integrale) $r^2 \sin\varphi$.

$$\int_{S^1} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 d\sigma = 4\pi$$

$$\int_{S^1} x_1^2 + x_2^2 d\sigma = \frac{8\pi}{3}$$

$$\int_{S^1} x_1^2 d\sigma = \frac{4\pi}{3}$$

Eq. del calore

sulla retta

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi \quad \text{dove } G(x,\xi,t) = \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{\sqrt{4\pi a^2 t}}$$

Proprietà: $|u| \leq \sup_x |\varphi|$

sulla retta con termine forzante lineare

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + \alpha u & x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

prendo $v(x,t) = e^{-\alpha t}u(x,t)$ (con $u(x,t)$ soluzione), che risove il problema precedente e si ottiene

$$u(x,t) = e^{\alpha t}\int_{\mathbb{R}} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi \quad \text{dove } G(x,\xi,t) = \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{\sqrt{4\pi a^2 t}}$$

sulla semiretta

sul segmento omogenea

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & x \in [0,L] \\ u(x,0) = \varphi(x) & \varphi \in C^0([0,L]) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} \varphi_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$\text{dove} \quad \varphi_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(\xi)\sin\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right)d\xi \qquad \Leftarrow \varphi(x) = \sum_{k\geq 1}\varphi_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

oppure

$$u(x,t) = \int_0^L G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi \qquad \text{dove} \quad G(x,\xi,t) = \frac{2}{L}\sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}$$

Principio del massimo: se $u(x,t) \in C(R)$ con $R = [0,L] \times [0,T]$ e $u_t = a^2 u_{xx}$ in $\dot{R}$ allora $u(x,t)$ raggiunge il massimo in $t = 0$ o $x = 0$ o $x = L$

sul segmento omogenea con termine forzante

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) & x \in [0,L] \\ u(x,0) = \varphi(x) & \varphi \in C^0([0,L]) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$$

si divide in $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & x \in [0,L] \\ u(x,0) = \varphi(x) & \varphi \in C^0([0,L]) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases} + \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) & x \in [0,L] \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = \sum_{k \geq 1} \varphi_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 t} + \sum_{k \geq 1} u_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

dove $u_k(t) = \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 (t-\tau)} d\tau$

$$\varphi_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(\xi)\sin\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right) d\xi \qquad \Leftarrow \varphi(x) = \sum_{k \geq 1} \varphi_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$f_k(\tau) = \frac{2}{L}\int_0^L f(\xi,\tau)\sin\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right) d\xi \qquad \Leftarrow f(x,t) = \sum_{k \geq 1} f_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

oppure

$$u(x,t) = \int_0^L G(x,\xi,t)\varphi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^L G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

dove $G(x,\xi,t) = \frac{2}{L}\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}$

sul segmento non omogenea

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) & x \in [0,L] \\ u(x,0) = \varphi(x) & \varphi \in C^0([0,L]) \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(L,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

prendo $u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$, scelgo $U(x,t)$ che mi rende omogenei i valori al bordo (per esempio $U(x,t) = \mu_1 + \frac{x}{L}(\mu_2 - \mu_1)$) e mi ritrovo che $v(x,t)$ soddisfa il caso precedente

sul segmento omogenea nelle derivate

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & x \in [0,L] \\ u(x,0) = \varphi(x) & \varphi \in C^0([0,L]), \varphi'(0) = \varphi'(L) = 0 \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{k \geq 0} \varphi_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 t} \quad \text{dove } \varphi_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(\xi)\cos\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right) d\xi$$

sul segmento con condizioni al bordo miste (1)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & x \in [0, L] \\ u(x,0) = \varphi(x) & \varphi \in C^0([0, L]) \\ u(0,t) = u_x(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{k \geq 1} \varphi_k \sin\left(\frac{2k-1}{2L}\pi x\right) e^{-\left(\frac{2k-1}{2L}a\pi\right)^2 t} \qquad \text{dove } \varphi_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(\xi) \sin\left(\frac{2k-1}{2L}\pi\xi\right) d\xi$$

sul segmento con condizioni al bordo miste (2)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & x \in [0, L] \\ u(x,0) = \varphi(x) & \varphi \in C^0([0, L]) \\ u_x(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{k \geq 0} \varphi_k \cos\left(\frac{2k-1}{2L}\pi x\right) e^{-\left(\frac{2k-1}{2L}a\pi\right)^2 t} \qquad \text{dove } \varphi_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(\xi) \cos\left(\frac{2k-1}{2L}\pi\xi\right) d\xi$$

Eq. di Laplace

Teorema: se u è armonica su tutto Ω allora $\int_{\partial\Omega} \frac{d}{dr} u(r,\theta) d\theta = 0$

Teorema: $u(M_0) = \frac{1}{2\pi a^2} \int_{\Sigma_a} u d\sigma$, dove $\Sigma_a = \partial B_a(M_0)$, se u è armonica in $B_a(M_0) \subseteq \mathbb{R}^2$
$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Sigma_a} u d\sigma$, dove $\Sigma_a = \partial B_a(M_0)$, se u è armonica in $B_a(M_0) \subseteq \mathbb{R}^3$

Principio del massimo (interno): $u \in C(T \cap \partial T) \cup C^2(T)$ armonica raggiunge il massimo in ∂T

Teoremi di unicità:
nel caso di un problema interno la soluzione è unica

la soluzione del problema esterno $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } T \subseteq \mathbb{R}^3 \\ u\big|_{\partial T} = f \\ \lim_{|M|\to\infty} u(M) = 0 \end{cases}$ è unica

la soluzione del problema esterno $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } T \subseteq \mathbb{R}^2 \\ u\big|_{\partial T} = f \\ u \text{ limitata} \end{cases}$ è unica

problemi radiali

le funzioni armoniche fondamentali (nel piano) sono:
$A \in \mathbb{R}$, θ, $\ln r$, $r^n \cos(n\theta)$, $r^n \sin(n\theta)$, $r^{-n} \cos(n\theta)$, $r^{-n} \sin(n\theta)$ e la soluzione è scrivibile come

$$u(r,\theta) = A + B\theta + C \ln r + \sum_{n\geq 1} [D_n r^n \cos(n\theta) + E_n r^n \sin(n\theta) + F_n r^{-n} \cos(n\theta) + G_n r^{-n} \sin(n\theta)]$$

sul rettangolo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \\ u = f(x) & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

$$u(x,y) = \sum_{k\geq 1} \frac{f_k}{\sinh(-k\pi \frac{L_2}{L_1})} \sinh\left(\frac{k\pi}{L_1}(y - L_2)\right) \sin(\frac{k\pi}{L_1} x) \quad \text{dove } f_k = \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} f(\xi) \sin(\frac{k\pi}{L1}\xi) d\xi$$

Nel caso di rotazioni $\begin{cases} x' = x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = -x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

sulla striscia

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega = \{\theta \in [0,1]\} \\ u = 0\big|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

ci si restringe al quadrato $[0,1] \times [0,1]$, si impone che $u(0,y) = f(y)$ e si risolve

Formule di addizione e sottrazione

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

Formule di prosta(ta)feresi

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \text{ con } \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta} \text{ con } \alpha, \beta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Formule di Werner

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$